

# Phần thứ Nhất

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI  
TRUNG TÂM ĐÀO TẠO TÀI NĂNG

**Đề thi tuyển sinh chương trình đào tạo K.s tài năng và K.s chất lượng cao  
Năm 1999**

**Môn thi: Toán học**  
**Thời gian: 90 phút(\*).**

## **Bài 1:**

Khảo sát sự biến thiên của hàm số  $f(x)$  xác định trên toàn  $\mathbb{R}$ , được cho như sau:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{khi } x = 0. \\ 0 & \text{khi } x \neq 0. \end{cases}$$

## **Bài 2:**

Tìm các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $a - 2b + 3c - 16 = 0$  sao cho biểu thức:

$$f = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 4a - 4b - 4c + 15.$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

## **Bài 3:**

Chứng minh rằng phương trình:

$$a \cdot \cos x + b \cdot \sin 2x + c \cdot \cos 3x = x$$

có nghiệm trên đoạn  $[-\pi, \pi]$  với mọi  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

## **Bài 4:**

Tìm hàm số  $f(x)$  xác định trên đoạn  $[0, 1]$ , biết rằng:

$$0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0, 1].$$

và:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq |x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in [0, 1].$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI  
TRUNG TÂM ĐÀO TẠO TÀI NĂNG

**Đề thi tuyển sinh chương trình đào tạo K.s tài năng và K.s chất lượng cao**

**Năm 2000**

**Môn thi: Toán học**

**Thời gian: 90 phút(\*).**

**Bài 1:**

Cho dãy số  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , xác định như sau:

$$x_1 > 0, x_n = \ln(1 + x_{n-1}), \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy số ấy hội tụ tới một giới hạn  $l$ . Tìm  $l$ .

**Bài 2:**

Chứng minh rằng nếu  $f(x)$  là hàm số xác định trên  $\mathbb{R}$ , thỏa mãn điều kiện

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^3, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

thì  $f(x)$  là hàm hằng.

**Bài 3:**

$f(x)$  là một hàm số xác định và liên tục tại mọi  $x \neq 0$ , lấy giá trị  $\geq 0$ , thỏa mãn điều kiện:

$$f(x) \leq k \int_0^x f(t) dt, \forall x \geq 0.$$

Trong đó  $k$  là một hằng số dương. Chứng minh rằng  $f(x) = 0, \forall x \geq 0$ .

(Gợi ý: Có thể xét sự biến thiên của hàm số  $F(x) = e^{-kx} \int_0^x f(t) dt$  trên khoảng  $(0, +\infty)$ ).

**Bài 4:**

Hàm số  $f(x)$  thỏa mãn điều kiện  $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Chứng minh rằng :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t \in (0, 1).$$

**Bài 5:**

Cho các số thực  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng :

$$a_1 e^{k_1 x} + a_2 e^{k_2 x} + \dots + a_n e^{k_n x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

khi và chỉ khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

(\*)Đề thi được soạn lại bởi Vũ Hữu Tiệp K52-ĐTVT-KSTN-ĐHBKHN

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI**  
**TRUNG TÂM ĐÀO TẠO TÀI NĂNG**

**Đề thi tuyển sinh chương trình đào tạo K.s tài năng và K.s chất lượng cao**

**Năm 2001**

**Môn thi: Toán học**

**Thời gian: 120 phút(\*).**

**Bài 1:**

Cho hàm số  $f(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}$ . Xét dãy số  $\{u_n\}$  xác định bởi:

$$u_0 = 1, u_{n+1} = f(u_n), \forall n \geq 0.$$

1./ Chứng minh rằng phương trình  $f(x) = x$  có 1 nghiệm duy nhất  $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

2./ Chứng minh rằng  $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$  với mọi  $n$  nguyên dương.

3./ Chứng minh rằng  $f'(x)$  tăng trên đoạn  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ . Suy ra tồn tại một số  $k \in (0, 1)$  sao cho  $|u_{n+1} - \alpha| = k|u_n - \alpha|$  với mọi  $n$  nguyên dương.

4./ Chứng minh rằng:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$ .

**Bài 2:**

Với 2 số  $x, y \in \mathbb{R}$  ta đặt  $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$ .

Chứng minh rằng với 3 số  $x, y, z \in \mathbb{R}$  ta luôn có:  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ .

**Bài 3:**

Cho hàm số  $f(x)$  có  $f''(x) > 0$  và  $a < b$ . Chứng minh rằng:

1./  $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ ,  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ ,  $\forall 0 < \lambda < 1$ .

2./  $\int_a^b f(x) dx \leq (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right)$ .

**Bài 4:**

Cho  $a < b$  và hàm số  $f(x)$  có  $f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(a) = f(b) = 0$

và  $\int_a^b |f'(x)| dx = m$ . Chứng minh rằng:  $|f(x)| \leq \frac{m}{2}$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI  
TRUNG TÂM ĐÀO TẠO TÀI NĂNG

**Đề thi tuyển sinh chương trình đào tạo K.s tài năng và K.s chất lượng cao**

**Năm 2002**

**Môn thi: Toán học**

**Thời gian: 120 phút(\*).**

**Bài 1:**

Cho bất phương trình:

$$\frac{x}{1+|x|} \geq mx^2 + x \quad (1)$$

1./ Giải bất phương trình (1) khi  $m = 2$ .

2./ Tìm  $m \in \mathbb{R}$  lớn nhất sao cho bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

**Bài 2:**

Cho dãy số  $\{x_n\}$  xác định nhau sau:

$$f(x) = \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3} \\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} - 1, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy  $\{x_n\}$  có giới hạn khi  $n \rightarrow +\infty$  và tìm giới hạn đó.

**Bài 3:**

Cho các số thực  $a_0, a_1, \dots, a_{2002}$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} a_0 \neq 0 \\ a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_{2002}}{2003} = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng phương trình:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2002}x^{2002} = 0$$

có nghiệm trên đoạn  $[0, 1]$ .

**Bài 4:**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm cấp hai  $f''(x) \geq 0$  trên toàn bộ  $\mathbb{R}$  và  $a \in \mathbb{R}$  cố định. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $g(x) = f(x) + (a-x)f'(x)$  trên  $\mathbb{R}$ .

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI  
TRUNG TÂM ĐÀO TẠO TÀI NĂNG

**Đề thi tuyển sinh chương trình đào tạo K.s tài năng và K.s chất lượng cao**

**Năm 2003**

**Môn thi: Toán học**

**Thời gian: 120 phút(\*).**

**Bài 1:**

Tìm đa thức  $P(x)$  có bậc bé nhất, đạt cực đại tại  $x = 1$  với  $P(1) = 6$  và đạt cực tiểu tại  $x = 3$  với  $P(3) = 2$ .

**Bài 2:**

Có tồn tại hay không một đa thức  $P(x)$  thỏa mãn 2 điều kiện:

$$i) P(x) \geq P''(x).$$

$$ii) P'(x) \geq P''(x).$$

với mọi giá trị của  $x$ .

**Bài 3:**

1./ Cho hàm số xác định và  $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Biết rằng tồn tại  $x_0 \in \mathbb{R}$  sao cho  $f(f(f(f(x_0)))) = x_0$ . Chứng minh rằng  $f(x_0) = x_0$ .

2./ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = y^3 + 2y - 2 \\ y = z^3 + 2z - 2 \\ z = t^3 + 2t - 2 \\ t = x^3 + 2x - 2. \end{cases}$$

**Bài 4:**

Cho dãy số  $\{x_n\}$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = n^2 x_n. \end{cases}$$

Tìm giới hạn:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 x_n)$ .

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI**  
**TRUNG TÂM ĐÀO TẠO TÀI NĂNG**

**Đề thi tuyển sinh chương trình đào tạo K.s tài năng và K.s chất lượng cao**

**Năm 2004**

**Môn thi: Toán học**

**Thời gian: 120 phút(\*).**

**Bài 1:**

Tìm các số  $a, b, c$  sao cho:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a(2x^3 - x^2) + b(x^3 + 5x^2 - 1) - c(3x^3 + x^2)}{a(5x^4 - x) - bx^4 + c(4x^4 + 1) + 2x^2 + 5x} = 1.$$

**Bài 2:**

Chứng minh rằng với mọi tham số  $m$ , phương trình:

$$x^3 - 9x - m(x^2 - 1) = 0$$

luôn có 3 nghiệm.

**Bài 3:**

$f(x)$  là hàm số xác định trên đoạn  $[0, 1]$ , thỏa mãn điều kiện:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 1].$$

Chứng minh rằng tồn tại một điểm duy nhất  $x_0 \in [0, 1]$  sao cho:

$$f(x_0) = x_0.$$

**Bài 4:**

1./ Chứng minh rằng nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a, b]$  thì:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

2./ Chứng minh rằng nếu hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[a, b]$  và thỏa mãn điều kiện  $f(a) = f(b) = 0$  thì:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} M.$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI  
TRUNG TÂM ĐÀO TẠO TÀI NĂNG

**Đề thi tuyển sinh chương trình đào tạo K.s tài năng và K.s chất lượng cao**

**Năm 2005**

**Môn thi: Toán học**

**Thời gian: 120 phút(\*).**

**Bài 1:**

Cho dãy số  $\{u_n\}$  xác định như sau:

$$u_0 = 1, u_n = u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}, \forall n \geq 0.$$

1./ Chứng minh rằng dãy số ấy không dẫn tới một giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ .

2./ Chứng minh rằng:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ .

**Bài 2:**

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, đơn điệu giảm trên  $[0, b]$  và  $a \in [0, b]$ .

Chứng minh rằng:

$$b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^b f(x) dx.$$

**Bài 3:**

$f(x)$  là một hàm số liên tục trên đoạn  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , thỏa mãn:

$$f(x) > 0 \text{ và } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx < 1.$$

Chứng minh rằng phương trình:

$$f(x) = \sin x$$

có ít nhất một nghiệm trong khoảng  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Bài 4:**

Cho hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{khi } x \neq 0. \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

với  $\alpha$  là hằng số dương. Với giá trị nào của  $\alpha$ , hàm số  $f(x)$  có đạo hàm tại mọi  $x$ .

**Bài 5:**

Tìm tất cả các hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn hệ thức:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(\*)Đề thi được soạn lại bởi Vũ Hữu Tiệp K52-ĐTVT-KSTN-ĐHBKHN

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI**  
**TRUNG TÂM ĐÀO TẠO TÀI NĂNG**

**Đề thi tuyển sinh chương trình đào tạo K.s tài năng và K.s chất lượng cao**

**Năm 2006**

**Môn thi: Toán học**

**Thời gian: 120 phút(\*).**

**Bài 1:**

Phương trình:  $x^3 - ax^2 + 4 = 0$ , (trong đó  $a$  là tham số), có bao nhiêu nghiệm?

**Bài 2:**

Cho dãy số  $\{u_n\}$  xác định như sau:  $u_0 \in \mathbb{R}$  và:

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^1 |t - u_n| dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1./ Chứng minh rằng: đó là 1 dãy số tăng và nếu  $u_0 \geq 1$  thì:

$$u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ đó chứng minh rằng:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ .

2./ Chứng minh rằng nếu  $0 \leq u_0 < 1$  hay nếu  $u_0 < 0$  thì  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ .

**Bài 3:**

Với mọi  $n$  nguyên dương, đặt  $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$ .

1./ Tính  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

2./ Giả sử  $c \in (0,1)$ . Đặt  $A_n = \int_0^c x^n \ln(1+x^2) dx, B_n = \int_c^1 x^n \ln(1+x^2) dx$ .

Chứng minh rằng:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = 0$ .

**Bài 4:**

1./ Tìm những hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$ , liên tục tại 0, sao cho:

$$f(2x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2./ Tìm những hàm số  $g(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$ , có đạo hàm tại 0, sao cho:

$$g(2x) = 2g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Bài 5:**

$x$  và  $y$  là 2 đường thẳng chéo nhau.  $A$  và  $B$  là 2 điểm cố định trên  $x$ .  $CD$  là đoạn thẳng có chiều dài  $l$  cho trước trượt trên  $y$ . Tìm vị trí của  $CD$  sao cho diện tích toàn phần của tứ diện  $ABCD$  là nhỏ nhất.



TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI  
TRUNG TÂM ĐÀO TẠO TÀI NĂNG

**Đề thi tuyển sinh chương trình đào tạo K.s tài năng và K.s chất lượng cao**

**Năm 2007**

**Môn thi: Toán học**

**Thời gian: 120 phút(\*).**

**Bài 1:**

Cho phương trình:  $\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{x}\right)^3 - \sqrt{x(1-x)} = m$  (1) ( $m$  là tham số)

- 1./ Giải phương trình (1) khi  $m = 1$ .
- 2./ Tìm  $m$  để phương trình (1) có nghiệm.

**Bài 2:**

Với  $n$  là số nguyên dương, đặt:

$$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{2n-1} (\sin x)^{2n} dx \quad \text{và} \quad V_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{2n-1} (\cos 2x)^{2n-1} dx.$$

Chúng minh rằng:

- 1./  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ .
- 2./  $2U_n + V_n \leq \frac{\pi^2}{32}, \forall n \geq 1$ .

**Bài 3:**

Ký hiệu tập  $\mathbb{R}^+$  là tập các số thực dương. Giả sử  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  là một hàm số liên tục và thỏa mãn  $f(f(x)) = \sqrt[5]{(x+1)^5 + 1}$ . Chứng minh rằng:

- 1./ Nếu  $f(x_1) = f(x_2)$  thì  $x_1 = x_2$ .
- 2./ Hàm số  $f(x)$  đơn điệu tăng và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$ .

**Bài 4:**

Cho mặt phẳng  $(P)$  và 2 điểm  $C, D$  ở về 2 phía đối với  $(P)$  sao cho  $CD$  không vuông góc với  $(P)$ . Hãy xác định vị trí 2 điểm  $A, B$  thuộc  $(P)$  sao cho  $AB = a$  ( $a > 0$  cho trước) và tổng độ dài  $CA + AB + BD$  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 5:**

Cho  $k_1, k_2, \dots, k_n$  là các số thực dương khác nhau từng đôi một.

Chúng minh rằng:  $\lambda_1 \cos(k_1 x) + \lambda_2 \cos(k_2 x) + \dots + \lambda_n \cos(k_n x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$  khi và chỉ khi  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

# Phần thứ Hai

## ĐÁP ÁN

Kỳ thi chọn hệ Kỹ sư tài năng và Kỹ sư chất lượng cao

Năm 1999

Môn thi: Toán

### Bài 1:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

Trước tiên ta có  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow$  hàm số liên tục tại  $x = 0$ .

$$\text{Với } x \neq 0, f'(x) = 1 + \frac{1+e^{\frac{1}{x}} + x \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = 1 + \frac{1+e^t + t \cdot e^t}{\left(1+e^t\right)^2}, \text{ trong đó } t = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Đặt } g(t) = 1 + e^t + t \cdot e^t \Rightarrow g'(t) = e^t(2+t) \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Qua  $t = -2$ ,  $g'(t)$  đổi dấu từ âm sang dương, vậy  $t = -2$  là điểm cực tiểu duy nhất của  $g(t) \Rightarrow g(t) \geq g(-2) = 1 + e^{-2} - 2e^{-2} = 1 - e^{-2} > 0$ .

Do đó  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$ .

Vậy  $f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

### Bài 2:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$[(a-1).1 + (b-1).(-2) + (c-1).3]^2 \leq [(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2][1^2 + (-2)^2 + 3^2]$$

$$\Rightarrow 14^2 \leq [a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 2b - 2c + 3].14$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 4a - 4b - 4c + 15 \geq 2\left(14 + \frac{9}{2}\right) = 37.$$

Dấu bằng xảy ra khi:

$$\frac{a-1}{1} = \frac{b-1}{-2} = \frac{c-1}{3} = \frac{(a-1) - 2(b-1) + 3(c-1)}{1+4+9} = 1.$$

$$\Rightarrow a = 2, b = -1, c = 4.$$

**Bài 3:**

Xét  $f(x) = a \sin x - \frac{b \cos 2x}{2} + \frac{c \sin 3x}{3} - \frac{x^2}{2}$  là hàm số xác định, khả vi trên  $\mathbb{R}$  và:

$$f(\pi) = f(-\pi) = -\frac{b}{2} - \frac{\pi^2}{2}.$$

Theo định lý Roll, tồn tại  $x_0 \in (-\pi, \pi)$  mà  $f'(x_0) = 0$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $x_0 \in (-\pi, \pi)$ . (dpcm)

**Bài 4:**

Cho  $x_1 = 1, x_2 = 0 \Rightarrow |f(1) - f(0)| \geq |1 - 0| = 1$ . (\*)

Do

$$0 \leq f(1) \leq 1, 0 \leq f(0) \leq 1$$

$$\Rightarrow |f(1) - f(0)| \leq 1.$$

Kết hợp với (1)  $\Rightarrow |f(1) - f(0)| = 0$ .

Dấu bằng xảy ra, vậy xảy ra 2 trường hợp:

$$*)\text{TH1: } \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Cho } x_1 = 0, x_2 = x \Rightarrow |f(x)| \geq |x| \Rightarrow f(x) \geq x. \quad (1)$$

$$\text{Cho } x_1 = 1, x_2 = x \Rightarrow |1 - f(x)| \geq |1 - x| \Rightarrow 1 - f(x) \geq 1 - x \Rightarrow f(x) \leq x. \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow f(x) = x$ .

$$*)\text{TH2: } \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Làm tương tự ta có  $f(x) = 1 - x$ .

Kết luận: có 2 hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán là:

$$f(x) = x$$

$$f(x) = 1 - x.$$

**ĐÁP ÁN****Kỳ thi chọn hệ Kỹ sư tài năng và Kỹ sư chất lượng cao****Năm 2000****Môn thi: Toán****Bài 1:**

Xét  $g(x) = x - \ln(1+x)$  có  $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0, \quad x \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow g(x)$  đồng biến trên  $(0, +\infty)$

$\Rightarrow g(x) > g(0) = 0, \quad \forall x \in (0, +\infty)$

Từ cách xác định dãy  $\Rightarrow x_n > 0, \quad \forall n \geq 1.$

$\Rightarrow x_n - x_{n+1} = x_n - \ln(1+x_n) = f(x_n) > 0, \quad \forall n \geq 1.$

Vậy  $\{x_n\}$  là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0  $\Rightarrow \{x_n\}$  hội tụ.

Giả sử  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$  khi đó  $l$  là nghiệm của phương trình  $g(x) = 0 \Rightarrow l = 0$

Vậy  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$

**Bài 2:**

Từ giả thiết ta có:  $0 \leq \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq |x_1 - x_2|^2.$

Cố định  $x_2$ , cho  $x_1 \rightarrow x_2$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{x_1 \rightarrow x_2} \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq \lim_{x_1 \rightarrow x_2} |x_1 - x_2|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x_1 \rightarrow x_2} \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x_1 \rightarrow x_2} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0.$$

Điều đó nghĩa là:

$$\exists f'(x), \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}, (c = \text{const}).$$

Vậy  $f(x)$  là hàm hằng.

**Bài 3:**

Xét hàm số:  $F(x) = e^{-kx} \int_0^x f(t) dt$  trên  $[0; +\infty)$

Ta có:  $F'(x) = e^{-kx} \left( f(x) - k \int_0^x f(t) dt \right) \leq 0, \forall x \geq 0.$

Vậy  $F(x) \leq F(0) = 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow \int_0^x f(t) dt \leq 0, \forall x \geq 0.$

Giả sử tồn tại  $x_0 \geq 0: f(x_0) > 0$ , do  $f(x)$  liên tục nên  $\int_0^{x_0} f(t) dt > 0.$

Điều mâu thuẫn chứng tỏ  $f(x) = 0, \forall x \geq 0.$

**Bài 4:**

Không giảm tổng quát, giả sử  $x < y$  (trường hợp  $x = y$  BĐT hiển nhiên đúng)

Ta có:  $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$

$$\Leftrightarrow (1-t)(f(y) - f(tx + (1-t)y)) \geq t(f(tx + (1-t)y) - f(x)) \quad (1).$$

Áp dụng định lý Lagrange,  $\exists a \in (x, (tx + (1-t)y))$

và  $b \in ((tx + (1-t)y), y) \quad (a < b)$

$$\begin{aligned} \text{thỏa mãn: } f(y) - f((tx + (1-t)y)) &= f'(b)(y - (tx + (1-t)y)) \\ &= f'(b).t.(y - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{và } f((tx + (1-t)y)) - f(x) &= f'(a)((tx + (1-t)y) - x) \\ &= f'(a).(1-t).(y - x) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow f'(b)t(1-t)(y-x) \geq f'(a)t(1-t)(y-x) \quad (2)$$

Do  $f''(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f'(b) > f'(a)$$

Và  $t(1-t)(y-x) > 0 \forall x < y, t \in (0, 1)$

Vậy (2) đúng, từ đó BĐT cần chứng minh đúng.

**Bài 5:**

$$a_1 e^{k_1 x} + a_2 e^{k_2 x} + \dots + a_n e^{k_n x} = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Ta chứng minh bằng quy nạp theo  $n$ .

Với  $n = 1$ , hiển nhiên  $a e^{kx} = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 0$ .

Giả sử khẳng định đúng đến  $n - 1$ .

Đặt  $f(x)$  là vế trái của phương trình. Đạo hàm 2 vế của (1) ta có:

$$k_1 a_1 e^{k_1 x} + k_2 a_2 e^{k_2 x} + \dots + k_n a_n e^{k_n x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy  $k_n f(x) - f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (k_n - k_i) a_i e^{k_i x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Theo giả thiết quy nạp  $\Rightarrow (k_n - k_1) a_1 = (k_n - k_2) a_2 = \dots = (k_n - k_{n-1}) a_{n-1} = 0$ .

Do các  $k_i$  khác nhau đôi một nên  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ .

Từ đó hiển nhiên  $a_n = 0$ .

Theo nguyên lý quy nạp, bài toán được chứng minh.

**ĐÁP ÁN****Kỳ thi chọn hệ Kỹ sư tài năng và Kỹ sư chất lượng cao****Năm 2001****Môn thi: Toán****Bài 1:**

1./ Xét hàm số  $g(x) = f(x) - x = \frac{e^x}{(1+x)^2} - x, x \in (0, +\infty)$ .

Khi đó  $g(x)$  liên tục trên  $(0, +\infty)$  và:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^x(x+1)^2 - 2e^x(x+1)}{(x+1)^4} - 1 \\ &= \frac{e^x(x-1)}{(x+1)^3} - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy  $g(x)$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

Mặt khác:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2} - \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{e}}{9} - \frac{1}{2} > 0,$$

$$g(1) = \frac{e}{4} - 1 < 0.$$

$\Rightarrow$  phương trình  $g(x) = 0$  có nghiệm  $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

Từ đó phương trình  $f(x) = x$  có nghiệm duy nhất  $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

2./ Ta có  $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{e}{4} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\sqrt{e}}{9} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

Và  $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{(x+1)^3} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$  nghịch biến trên  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

Do đó với  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], f(x) \in \left(\frac{e}{4}, \frac{4\sqrt{e}}{9}\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

Bằng quy nạp  $\Rightarrow u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned}
 3./ \quad f'(x) &= \frac{e^x(x-1)}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{(e^x(x-1)+e^x)(x+1)^3 - 3(x+1)^2 e^x(x-1)}{(x+1)^6} \\
 &= \frac{e^x x(x+1) + 3e^x(1-x)}{(x+1)^6} > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ tăng trên đoạn } \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

$$\Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0,$$

$$f'(x) > f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-\sqrt{e}}{2\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{-4\sqrt{e}}{27} = -q > -1 \Rightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq q < 1.$$

Chọn  $k \in (q, 1)$  bất kỳ.

Theo định lý Lagrange,  $\exists \beta_n$  nằm giữa  $u_{n+1}$ ,  $\alpha$  mà:

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| = |f'(\beta_n)| |u_n - \alpha| \leq q |u_n - \alpha| < k |u_n - \alpha|.$$

$$4./ \text{ Theo câu 3/ } |u_n - \alpha| < k |u_{n-1} - \alpha| < k^2 |u_{n-2} - \alpha| < \dots < k^n |u_0 - \alpha|.$$

Do  $0 < k < 1 \Rightarrow k^n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow +\infty$  từ đó  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - \alpha| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$ .

## **Bài 2:**

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Ta có:  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

$$\Leftrightarrow \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \leq \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1 + |x - y|} \leq 1 - \frac{1}{1 + |x - z|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x - y| - |z - x|}{(1 + |x - y|)(1 + |z - x|)} \leq \frac{|z - y|}{1 + |z - y|}.$$

Lại do  $|x - y| - |z - x| \leq |z - y|$  và

$$(1 + |x - y|)(1 + |z - x|) = 1 + |x - y| + |z - x| + |x - y||z - x| \geq 1 + |x - y| + |z - x| \geq 1 + |z - y| > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1 + |x - y|)(1 + |z - x|)} \leq \frac{1}{1 + |z - y|}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.



**Bài 3:**

1./ Xem bài 4 năm 2000.

2./ Xét hàm số:  $g(x) = \int_a^x f(t) dt - (x-a)f\left(\frac{x+a}{2}\right), x \in [a, b]$ .

Ta có:  $g'(x) = f(x) - f\left(\frac{x+a}{2}\right) - \frac{x-a}{2} f'\left(\frac{x+a}{2}\right)$ .

Theo định lý Lagrange tồn tại  $x_0 \in \left(a, \frac{x+a}{2}\right)$  mà

$$f(x) - f\left(\frac{x+a}{2}\right) = f'(x_0) \left(x - \frac{x+a}{2}\right) = f'(x_0) \left(\frac{x-a}{2}\right).$$

$$\Rightarrow g'(x) = \left(\frac{x-a}{2}\right) \left(f'(x_0) - f'\left(\frac{x+a}{2}\right)\right).$$

Do  $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Vì  $a < x_0 < \frac{x+a}{2} \Rightarrow f'(x_0) < f'\left(\frac{x+a}{2}\right) \Rightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$ .

Vậy  $g(x) \leq g(a) = 0, \forall x \in [a, b]$ .

Hay  $\int_a^b f(t) dt \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ .

**Bài 4:**

Do  $f(x)$  liên tục trên  $[a, b] \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b]$  mà  $|f(x_0)| \geq |f(x)|, \forall x \in [a, b]$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } m &= \int_a^b |f'(x)| dx = \int_a^{x_0} |f'(x)| dx + \int_{x_0}^b |f'(x)| dx \\ &\geq \left| \int_a^{x_0} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_0}^b f(x) dx \right| \\ &= |f(x_0) - f(a)| + |f(b) - f(x_0)| \\ &= 2|f(x_0)|. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq |f(x_0)| \leq \frac{m}{2}.$$

**ĐÁP ÁN****Kỳ thi chọn hệ Kỹ sư tài năng và Kỹ sư chất lượng cao****Năm 2002****Môn thi: Toán****Bài 1:**

$$\frac{x}{1+|x|} \geq mx^2 + x. \quad (1)$$

$$1./ \text{ Khi } m = 2, (1) \Leftrightarrow \frac{x}{1+|x|} \geq 2x^2 + x. \quad (2)$$

Xét 3 trường hợp:

\*)TH1:  $x > 0$ .

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} \geq (2x+1)x \Leftrightarrow 1 \geq (2x+1)(1+x) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2}.$$

Vậy trong trường hợp này, BPT vô nghiệm.

\*)TH2:  $x < 0$ .

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq (2x+1)x \Leftrightarrow 1 \leq (2x+1)(1-x) \Leftrightarrow 2x^2 + x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}.$$

\*)TH3:  $x = 0 \Rightarrow$  BPT đúng.Vậy nghiệm của BPT là  $x \leq -\frac{1}{2}$  và  $x = 0$ .**2./****Điều kiện cần:**Giả sử  $m$  là số thỏa mãn.

$$\Rightarrow \frac{x}{1+|x|} \geq mx^2 + x, \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1+x} \geq mx^2 + x \Leftrightarrow mx + (m+1) \leq 0, \forall x > 0 \Rightarrow m \leq 0. \quad (3)$$

Cho  $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow m+1 \leq 0 \Rightarrow m \leq -1$ .**Điều kiện đủ:**Với  $m = -1$ . Thay vào ta thấy BPT đúng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ Kết luận  $m = -1$ .

**Bài 2:**

Từ giả thiết ta có:  $x_n > -1, \forall n$ .

Do

$$|x_1| = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow x_2 < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < |x_2| < 1.$$

$$\Rightarrow -\frac{7}{8} < x_3 < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < |x_3| < \frac{7}{8} < 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow -\frac{7}{8} < x_n < -\frac{1}{2}, \forall n > 2.$$

Đặt  $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1$ .

Xét phương trình  $f(x) = x, x \in \left(-\frac{7}{8}, -\frac{1}{2}\right)$ , có nghiệm  $\alpha = 1 - \sqrt{3}$ .

Theo định lý Lagrange, tồn tại  $\beta_n$  nằm giữa  $\alpha$  và  $x_n$  thỏa mãn:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \alpha| &= |f(x_n) - f(\alpha)| = |f'(\beta_n)| |x_n - \alpha| = |\beta_n| |x_n - \alpha| < k |x_n - \alpha| \\ &< k^2 |x_{n-1} - \alpha| \dots < k^n |x_1 - \alpha|, \left(k = \frac{7}{8} < 1\right). \end{aligned}$$

Do  $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n |x_1 - \alpha| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - \alpha| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha = 1 - \sqrt{3}$ .

**Bài 3:**

Xét hàm số  $f(x) = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \dots + \frac{a_{2002} x^{2003}}{2003}, x \in [0, 1]$ .

Ta có  $f(x)$  liên tục trên  $[0, 1]$  và  $f(0) = f(1) = 0$ , theo định lý Roll,  $\exists x_0 \in [0, 1]$  sao cho  $f'(x_0) = 0 \Rightarrow$  phương trình  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2002} x^{2002} = 0$  có nghiệm trên đoạn  $[0, 1]$ .

**Bài 4:**

Xét hàm số:  $h(x) = f(a) - g(x) = f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)$ .

Theo định lý Lagrange,  $\exists x_0$  nằm giữa  $a$  và  $x$  thỏa mãn

$$f(a) - f(x) = f'(x_0)(a - x).$$

Do đó:  $h(x) = (a - x)(f'(x_0) - f'(x))$ .

Vì  $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)$  đồng biến  $\Rightarrow (a - x)$  và  $f'(a) - f'(x)$  cùng dấu

$$\Rightarrow h(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) \leq f(a), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dấu bằng xảy ra khi  $x = a$ .

Vậy  $\max g(x) = f(a)$ .

**ĐÁP ÁN****Kỳ thi chọn hệ Kỹ sư tài năng và Kỹ sư chất lượng cao****Năm 2003****Môn thi: Toán****Bài 1:**

Do đa thức  $P(x)$  đạt cực đại và cực tiểu tại  $x = 1$  và  $x = 3$  nên  $\deg P(x) \geq 3$  và

$$P'(x) = (x-1)(x-3)Q(x) \text{ với } Q(x).$$

( $\deg P(x)$  là bậc của đa thức  $P(x)$ )

$$\text{Nếu } \deg Q(x) = 0, Q(x) = a$$

$$\Rightarrow P(x) = a \left( \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) + c.$$

$$P(1) = 6 \Rightarrow \frac{4a}{3} + c = 6.$$

$$P(3) = 2 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2.$$

Thử lại thấy đa thức này thỏa mãn bài toán và có bậc nhỏ nhất.

**Bài 2:**

Trước hết ta có nhận xét: Nếu đa thức  $Q(x)$  không đổi dấu trên  $\mathbb{R}$  thì  $\deg Q(x)$  chẵn.

Giả sử tồn tại đa thức thỏa mãn bài toán.

$$\text{Xét } R(x) = P(x) - P''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Rõ ràng } \deg R(x) = \deg P(x) \Rightarrow \deg P(x) \text{ chẵn} \Rightarrow \deg P'(x) \text{ lẻ.}$$

$$\Rightarrow \deg (P'(x) - P''(x)) = \deg P'(x) \text{ lẻ.}$$

$$\Rightarrow \text{đa thức } (P'(x) - P''(x)) \text{ đổi dấu trên } \mathbb{R} \text{ (mâu thuẫn với ii).}$$

Điều vô lý suy ra không tồn tại đa thức thỏa mãn điều kiện bài toán.

**Bài 3:**

$$1./ \text{ Do } f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

$$\text{Nếu: } f(x_0) > x_0 \Rightarrow f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0 \Rightarrow f(f(f(x_0))) > f(f(x_0)) > x_0.$$

$$\Rightarrow f(f(f(f(x_0)))) > f(f(f(x_0))) > x_0.$$

Tương tự đối với trường hợp  $f(x_0) < x_0$ .

Điều vô lý dẫn đến  $f(x_0) = x_0$ .

2./ Không giảm tổng quát, giả sử  $x = \max\{x, y, z, t\} \Rightarrow x \geq y; x \geq t$ .

$$x \geq y \Rightarrow y^3 + 2y - 2 \geq y \Leftrightarrow (y-1)(y^2 + y + 2) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$$

$$x \geq t \Rightarrow t^3 + 2t - 2 \leq t \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 2) \leq 0 \Leftrightarrow t \geq 1 \Rightarrow x \leq 1.$$

$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = t = 1 \Rightarrow z = 1.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là  $x = y = z = t = 1$ .

#### **Bài 4:**

Từ:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n^2 x_n \Rightarrow n^2 x_n + x_{n+1} = (n+1)^2 x_{n+1}.$$

$$\Rightarrow n^2 x_n = n(n+2)x_{n+1} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{n}{n+2} x_n \Rightarrow x_{n+1} = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)} x_n.$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow x_{n+1} = \frac{n(n-1)\dots 2.1}{(n+2)(n+1)\dots 4.2} x_1 = \frac{4}{(n+2)(n+1)}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x_n = \frac{4n^2}{(n+1)n} = 4.$$

**ĐÁP ÁN****Kỳ thi chọn hệ Kỹ sư tài năng và Kỹ sư chất lượng cao****Năm 2004****Môn thi: Toán****Bài 1:**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a(2x^3 - x^2) + b(x^3 + 5x^2 - 1) - c(3x^3 + x^2)}{a(5x^4 - x) - bx^4 + c(4x^4 + 1) + 2x^2 + 5x} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(2a + b - 3c)x^3 + (5b - a - c)x^2 - b}{(5a - b + 4c)x^4 + 2x^2 + (-a + 5)x + c} = 1.$$

Nhận xét, để tồn tại giới hạn trên, cả tử và mẫu phải có cùng bậc và hệ số cao nhất của tử và mẫu phải bằng nhau, điều này tương đương với:

$$\begin{cases} 5a - b + 4c = 0 \\ 2a + b - 3c = 0 \\ 5b - a - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{109} \\ b = \frac{46}{109} \\ c = \frac{14}{109}. \end{cases}$$

**Bài 2:**

Xét hàm số  $f(x) = x^3 - 9x - m(x^2 - 1)$ .

$$f'(x) = 3x^2 - 2mx - 9.$$

Ta thấy phương trình  $f'(x) = 0$  luôn có 2 nghiệm trái dấu  $x_1, x_2$  do  $ac < 0$  và

$$f(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{m}{9}\right)(3x^2 - 2mx - 9) - \left(6 + \frac{2m}{9}\right)x.$$

$$\Rightarrow f(x_1)f(x_2) = \left(6 + \frac{2m}{9}\right)^2 x_1 x_2 < 0.$$

Vậy 2 điểm cực trị của hàm số đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nằm ở 2 phía của trục hoành.

Lại do  $f(x)$  là đa thức bậc 3 nên phương trình  $f(x) = 0$  luôn luôn có 3 nghiệm phân biệt.

**Bài 3:**

$$\text{Từ: } |f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$$

$$\text{Cho } x_1 \rightarrow x_2 \Rightarrow f(x_1) \rightarrow f(x_2) \Rightarrow f(x) \text{ liên tục trên } [0, 1].$$

$$\text{Trước hết ta chứng minh tồn tại } x_0 \in [0, 1]: f(x_0) = x_0. \quad (1)$$

$$\text{Theo giả thiết: } f(0) \geq 0, f(1) \leq 1.$$

Nếu 1 trong 2 BĐT trên xảy ra dấu bằng  $\Rightarrow$  (1) đúng.

Nếu  $\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) < 1 \end{cases}$ . Xét hàm số  $g(x) = f(x) - x, x \in [0, 1] \Rightarrow g(x)$  liên tục trên  $[0, 1]$ .

Mà  $g(0) > 0, g(1) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in [0, 1]: g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$

Vậy (1) luôn đúng.

Giả sử tồn tại  $a, b \in [0, 1]: f(a) = a, f(b) = b, a \neq b$ .

Theo giả thiết:  $|a - b| = |f(a) - f(b)| < |a - b|$ . Vô lý  $\Rightarrow$  Giả sử sai.

Vậy tồn tại duy nhất số  $x_0$  thỏa mãn  $f(x_0) = x_0$ .

#### **Bài 4:**

$$1./ \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Chia  $[a, b]$  thành các đoạn nhỏ mà trên mỗi đoạn đó  $f(x)$  không đổi dấu.

Giả sử  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  là các điểm chia.

$$\text{Ta có: } \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right| = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx.$$

2./ Ta thấy, với  $\forall x \in (a, b), \exists t \in (a, x), k \in (x, b):$

$$|f(x)| = |f(x) - f(a)| = |f'(t)| (x - a) \leq M(x - a).$$

$$|f(x)| = |f(b) - f(x)| = |f'(k)| (b - x) \leq M(b - x).$$

$$\text{Suy ra } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \leq M \left( \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x - a) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b - x) dx \right) \\ &= \frac{M}{2} \left( (x - a)^2 \Big|_a^{\frac{a+b}{2}} - (b - x)^2 \Big|_{\frac{a+b}{2}}^b \right) = \frac{(a - b)^2}{4} M. \end{aligned}$$

**ĐÁP ÁN****Kỳ thi chọn hệ Kỹ sư tài năng và Kỹ sư chất lượng cao****Năm 2005****Môn thi: Toán****Bài 1:**

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}. \quad (1)$$

1./ Giả sử tồn tại  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ . Trong (1) cho  $n \rightarrow +\infty \Rightarrow l = l + \frac{1}{l}$ . Phương trình này vô nghiệm  $\Rightarrow$  không tồn tại giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

2./ Do  $u_0 = 1 > 0 \Rightarrow u_n > 0, \forall n \Rightarrow \{u_n\}$  là dãy tăng.

Giả sử  $\exists M : u_n < M, \forall n \Rightarrow \{u_n\}$  bị chặn trên.

$\Rightarrow \{u_n\}$  hội tụ. Mâu thuẫn với câu 1./

Vậy giả sử sai  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ .

**Bài 2:**

Do  $f(x)$  liên tục trên  $[0, b] \Rightarrow \exists F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x)$  trên đoạn đó.

$$\Rightarrow b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_0^b f(x) dx.$$

$$\Leftrightarrow b(F(a) - F(0)) \geq a(F(b) - F(0)).$$

$$\Leftrightarrow (b-a)(F(a) - F(0)) \geq a(F(b) - F(a)).$$

Theo định lý Lagrange  $\exists c \in (0, a), d \in (a, b) (c < d)$ :

$$F(a) - F(0) = f(c).a \quad \text{và}$$

$$F(b) - F(a) = f(d).(b-a)$$

Vậy BĐT ở đề bài tương đương với:  $(b-a)f(c).a \geq a.f(d)(b-a)$ .

Do  $f(x)$  là hàm số đơn điệu giảm  $\Rightarrow f(c) \geq f(d)$ . Mà  $(b-a)a \geq 0$  nên BĐT đã cho đúng.



**Bài 3:**

Xét hàm số  $g(x) = f(x) - \sin x$  với  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Ta có  $g(0) = f(0) > 0$ . (1)

$$\text{Và } \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - \sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx < 1 - 1 = 0. \quad (2)$$

Nếu  $\exists x_0 : g(x_0) = 0 \Rightarrow dpcm$ .

Nếu  $g(x) > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx > 0$ . Mâu thuẫn với (2).

Nếu  $\exists x_1 : g(x_1) < 0$ .

Kết hợp với (1) và do  $g(x)$  liên tục trên  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \exists x_0 : g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = \sin x_0$  (dpcm).

**Bài 4:**

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases} \quad (\alpha > 0).$$

Ta có  $0 \leq \left|x^\alpha \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x^\alpha|$  và  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$  do  $\alpha > 0$ .

Vậy  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$  nên  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Rõ ràng với  $\forall \alpha, f(x)$  có đạo hàm tạo  $\forall x \neq 0$ . Ta phải tìm  $\alpha$  để tồn tại  $f'(0)$ , tức là tồn tại giới hạn  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}\right)$ .

Tương tự như trên, giới hạn trên tồn tại nếu  $\alpha > 1$ .

Với  $\alpha \leq 1$ , ta sẽ chứng minh không tồn tại giới hạn trên.

$$\text{Thật vậy } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t^{1-\alpha} \sin t).$$

Dễ dàng chứng minh được giới hạn này không tồn tại bằng phản chứng.

Giả sử  $\lim_{t \rightarrow \infty} (t^{1-\alpha} \sin t) = M$ . Tức là  $\forall \varepsilon > 0, \exists t_0 : \forall t \geq t_0$  thì  $|t^{1-\alpha} \sin t - M| < \varepsilon$ .

Cho  $t = k\pi \Rightarrow M = 0$ . nhưng điều này là không thể vì với  $t = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k > \frac{t_0}{2\pi}$  thì  $\left| t^{1-\alpha} \sin t - M \right| = \left( \frac{\pi}{2} + k2\pi \right)^{1-\alpha}$  không thể nhỏ hơn  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  đủ nhỏ). Điều vô lý dẫn đến không tồn tại giới hạn trên.

Kết luận:  $\alpha > 1$ .

### **Bài 5:**

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } g(x) = f(x) - x^2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow f(x+y) - (x+y)^2 = f(x) - x^2 + f(y) - y^2$$

$$\Leftrightarrow g(x+y) = g(x) + g(y). \quad (2)$$

Do  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  nên  $g(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Cho } x = y = 0 \Rightarrow g(0) = 2g(0) \Rightarrow g(0) = 0.$$

$$\text{Ta có: } (2) \Leftrightarrow \frac{g(x+y) - g(x)}{y} = \frac{g(y) - g(0)}{y}.$$

$$\text{Cho } y \rightarrow 0 \Rightarrow g'(x) = g'(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow g'(x) = c, \forall x \in \mathbb{R} (c = \text{const})$$

$$\Rightarrow g(x) = cx + d. (d = \text{const}) \Rightarrow f(x) = x^2 + cx + d.$$

$$\text{Thay vào (1)} \Rightarrow d = 0.$$

$$\text{Vậy } f(x) = x^2 + cx.$$

**ĐÁP ÁN****Kỳ thi chọn hệ Kỹ sư tài năng và Kỹ sư chất lượng cao****Năm 2006****Môn thi: Toán****Bài 1:**

$$x^3 - ax^2 + 4 = 0.$$

Đặt về trái của phương trình là  $f(x)$  thì  $f'(x) = 3x^2 - 2ax$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0. \\ x = \frac{2a}{3}. \end{cases}$$

$$f(0) = 4 > 0, \quad f\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{8a^3}{27} - \frac{4a^3}{9} + 4 = \frac{4(27 - a^3)}{27}.$$

Từ đó ta có thể suy ra:

Nếu  $a < 3$ : Phương trình có 1 nghiệm thực.

Nếu  $a = 3$ : Phương trình có 2 nghiệm (1 nghiệm kép  $x = 2$ ).

Nếu  $a > 3$ : Phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

**Bài 2:**

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^1 |t - u_n| dt.$$

1./  $u_0 \geq 1$ .

Từ cách xác định dãy ta có  $u_{n+1} \geq u_n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n + \int_0^1 |t - u_n| dt = u_n + \int_0^1 (u_n - t) dt = 2u_n - \frac{1}{2}.$$

Từ đó suy ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ .

$$2./ \text{ Nếu } u_0 \leq 0 \Rightarrow u_1 = u_0 + \int_0^1 (t - u_0) dt = u_0 + \frac{1}{2} - u_0 = \frac{1}{2}.$$

Vậy ta chỉ cần xét với  $0 < u_0 < 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } u_1 &= u_0 + \int_0^1 |t - u_n| dt = u_0 + \int_0^{u_0} (u_0 - t) dt + \int_{u_0}^1 (t - u_0) dt. \\ &= u_0 + u_0(u_0 - 0) - \frac{u_0^2}{2} + \frac{1 - u_0^2}{2} - u_0(1 - u_0). \\ &= u_0^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Do } 0 < u_0 < 1 \Rightarrow u_1 > \frac{1}{2}.$$

Nếu  $u_1 \geq 1 \Rightarrow dpcm.$  (Theo câu 1.)

$$\text{Nếu } \frac{1}{2} < u_1 < 1 \Rightarrow u_2 = u_1^2 + \frac{1}{2} > \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Tương tự nếu } u_2 \text{ vẫn } < 1 \text{ thì } u_3 = u_2^2 + \frac{1}{2} > \frac{9}{16} + \frac{1}{2} > 1.$$

Vậy theo câu 1/ ta có  $dpcm.$

### **Bài 3:**

$$1./ I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx \Rightarrow I_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } 0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \ln 2 dx = \frac{\ln 2}{n+1}.$$

$$\text{Do } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0 \text{ nên theo nguyên lý giới hạn kẹp ta có } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

$$2./ \text{Ta có } A_n = \int_0^c x^n \ln(1+x^2) dx \leq \ln(1+c^2) \int_0^c x^n dx.$$

$$\text{và } B_n = \int_c^1 x^n \ln(1+x^2) dx \geq \ln(1+c^2) \int_c^1 x^n dx \geq 0.$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{A_n}{B_n} \leq \frac{\int_0^c x^n dx}{\int_c^1 x^n dx} = \frac{c^{n+1}}{1-c^{n+1}}.$$

$$\text{Mà } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^{n+1}}{1-c^{n+1}} = 0 \text{ do } 0 < c < 1.$$

$$\text{Theo nguyên lý giới hạn kẹp } \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = 0.$$

### **Bài 4:**

$$1./ f(2x) = f(x).$$

$$\text{Từ giả thiết ta có } f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) = \dots = f\left(\frac{x}{2^n}\right), \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Với } x \text{ bất kỳ cho } n \rightarrow +\infty \Rightarrow f\left(\frac{x}{2^n}\right) \rightarrow f(0) \text{ do } f(x) \text{ liên tục tại } x = 0.$$

$$\Rightarrow f(x) = f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vậy nghiệm của bài toán là } f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}, (c = \text{const})$$

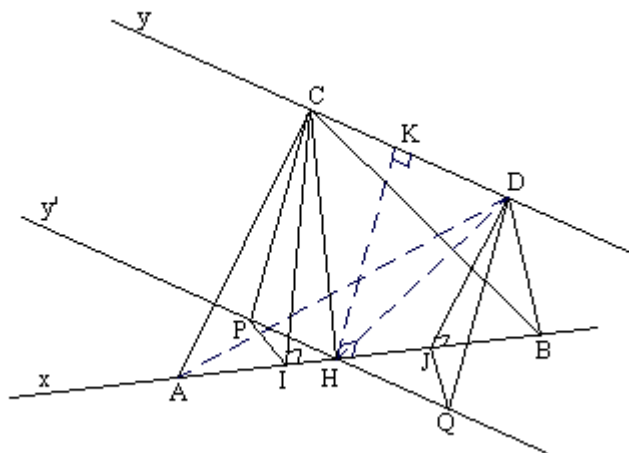
2./ Từ  $g(2x) = 2g(x) \Rightarrow g(0) = 0$ .

$$\text{Và } \frac{g(2x)}{2x} = \frac{2g(x)}{2x} = \frac{g(x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x}.$$

Do  $g(x)$  khả vi tại  $x = 0$  nên  $h(x) = \frac{g(x)}{x}$  liên tục tại  $x = 0$  và  $h(2x) = h(x)$ .

Theo câu 1./ ta có  $h(x) = c \Rightarrow g(x) = cx$ .

### **Bài 5:**



Gọi  $HK$  là đường vuông góc chung của  $x, y$ . Qua  $H$  kẻ đường thẳng  $y'$  song song với  $y$ .

Qua  $C, D$  kẻ  $CP, DQ$  song song với  $HK$ ,  $P, Q$  nằm trên  $y'$ .

Ta có:

$$S_{tpABCD} = S_{ACD} + S_{BCD} + S_{CAB} + S_{DAB} = \frac{1}{2}CD(d(A, y) + d(B, y)) + \frac{1}{2}AB(d(C, x) + d(D, x)).$$

Vậy diện tích toàn phần của tứ diện  $ABCD$  nhỏ nhất khi  $d(C, x) + d(D, x)$  đạt giá trị nhỏ nhất.

Gọi  $I, J$  lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ  $C, D$  xuống  $x$ .

Ta phải tìm vị trí của  $C, D$  để  $CI + DJ$  đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } CI + DJ = \sqrt{CH^2 - HI^2} + \sqrt{DH^2 - HJ^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{HK^2 + CK^2 - HI^2} + \sqrt{HK^2 + KD^2 - HJ^2} \\
&= \sqrt{HK^2 + PH^2 - HI^2} + \sqrt{HK^2 + HQ^2 - HJ^2} \\
&= \sqrt{HK^2 + PI^2} + \sqrt{HK^2 + QJ^2} = \sqrt{HK^2 + PH^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{HK^2 + QH^2 \sin^2 \alpha}.
\end{aligned}$$

Với  $\alpha$  là góc giữa  $x$  và  $y$  và  $PQ = CD = l$ .

Lại có:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{HK^2 + PH^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{HK^2 + QH^2 \sin^2 \alpha} \geq \sqrt{4HK^2 + \sin^2 \alpha (PH + QH)^2} \\
&\geq \sqrt{4HK^2 + \sin^2 \alpha \cdot PQ^2} = \sqrt{4HK^2 + \sin^2 \alpha \cdot l^2}
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $H$  là trung điểm của  $PQ$ . Từ đó suy ra vị trí  $C, D$ .

**ĐÁP ÁN****Kỳ thi chọn hệ Kỹ sư tài năng và Kỹ sư chất lượng cao****Năm 2007****Môn thi: Toán****Bài 1:**

$$\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{x}\right)^3 - \sqrt{x(1-x)} = m. \quad (*)$$

1./ Điều kiện:  $0 \leq x \leq 1$ .Đặt  $t = \sqrt{1-x} + \sqrt{x}$ .

$$\Rightarrow t^2 = 1 + 2\sqrt{x(1-x)} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x(1-x)} = \frac{t^2-1}{2} \\ t \geq 1. \end{cases}$$

$$\text{Và } t^2 = \left(\sqrt{1-x} + \sqrt{x}\right)^2 \leq (1^2 + 1^2)(1-x+x) = 2 \Rightarrow t \leq \sqrt{2}.$$

Vậy  $1 \leq t \leq \sqrt{2}$ .

$$\text{Thay vào } (*) \text{ ta có: } t^3 - \frac{t^2-1}{2} = m. \quad (1)$$

Khi  $m = 1$ 

$$(1) \Leftrightarrow t^3 - \frac{t^2-1}{2} = 1 \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Theo trên,  $t \geq 1$ , dấu bằng xảy ra khi  $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0. \\ x = 1. \end{cases}$ Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 0, x = 1$ .

$$2./ \text{Đặt } f(t) = t^3 - \frac{t^2-1}{2}, \quad t \in [1, \sqrt{2}].$$

Phương trình (1) có nghiệm khi  $m$  nằm trong dải giá trị của  $f(t)$ .

$$\text{Ta có: } f'(t) = 3t^2 - t = t(3t-1).$$

$$\text{Do } 1 \leq t \leq \sqrt{2} \Rightarrow f'(t) > 0 \forall t \in [1, \sqrt{2}].$$

$$\Rightarrow f(1) \leq f(t) \leq f(\sqrt{2}) \Rightarrow 1 \leq f(t) \leq 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

Vậy với  $m \in \left[1, 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right]$  thì phương trình đã cho có nghiệm.

**Bài 2:**

$$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{2n-1} (\sin x)^{2n} dx, \quad V_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{2n-1} (\cos 2x)^{2n-1} dx.$$

$$1./ \text{ Ta thấy } 0 \leq U_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{2n-1} dx = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{2n}.$$

$$\text{Mà } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{2n} = 0 \text{ (do } \frac{\pi}{4} < 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0.$$

$$\text{Tương tự, } \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0.$$

$$2./ \text{ Với } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ thì } 0 \leq \sin x, \cos 2x \leq 1.$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^{2n-1} \leq x, \quad 0 \leq (\sin x)^{2n} \leq \sin x, \quad 0 \leq (\cos 2x)^{2n-1} \leq \cos 2x.$$

Vậy:

$$\begin{aligned} 2U_n + V_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^{2n-1} \left( 2(\sin x)^{2n} + (\cos 2x)^{2n-1} \right) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \left( 2\sin^2 x + \cos 2x \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \frac{\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

**Bài 3:**

$$f(f(x)) = \sqrt[5]{(x+1)^5 + 1}.$$

$$1./ \text{ Ta có } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2))$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{(x_1+1)^5 + 1} = \sqrt[5]{(x_2+1)^5 + 1}.$$

$$\Leftrightarrow (x_1+1)^5 + 1 = (x_2+1)^5 + 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$



2./ Theo câu 1./,  $f(x)$  đơn ánh, kết hợp với  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$  đơn điệu trên  $\mathbb{R}$ .

Nếu  $f(x)$  đơn điệu giảm trên  $\mathbb{R}$ .

Từ giả thiết ta có  $f(f(x)) > x + 1 > x \Rightarrow f(f(f(x))) > f(x)$

Và  $f(f(f(x))) < f(x)$  (Do  $f(x)$  đơn điệu giảm trên  $\mathbb{R}$ .)

Mâu thuẫn suy ra  $f(x)$  đơn điệu tăng trên  $\mathbb{R}$ .

Do  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$  nên  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

Ta có với  $x$  đủ lớn,  $1 < \frac{f(x+1)}{f(x)} < \frac{f(f(f(x)))}{f(x)} = \frac{\sqrt[5]{(f(x)+1)^5 + 1}}{f(x)}$ .

Mà  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{(f(x)+1)^5 + 1}}{f(x)} = \lim_{f(x) \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{(f(x)+1)^5 + 1}}{f(x)} = 1$ .

Theo nguyên lý giới hạn kẹp ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1$ .

#### **Bài 4:**

Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $C, D$  xuống  $(P)$ .  $I$  là giao điểm của  $CD, HK$  Ta có:

$$CA + AB + BD = \\ AB + \sqrt{CH^2 + HA^2} + \sqrt{DK^2 + KB^2}.$$

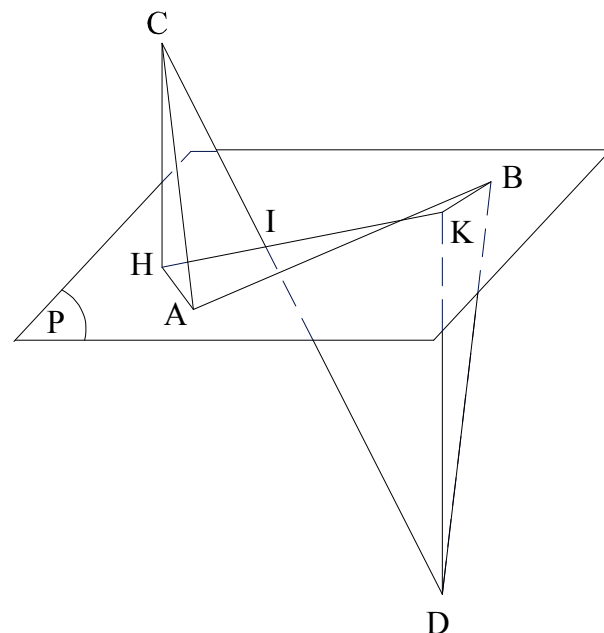
Vậy ta cần xác định A, B để

$\sqrt{CH^2 + HA^2} + \sqrt{DK^2 + KB^2}$  đạt giá trị nhỏ nhất.

Theo BĐT Mincopxki ta có:

$$\sqrt{CH^2 + HA^2} + \sqrt{DK^2 + KB^2} \geq \sqrt{(CH + DK)^2 + (HA + KB)^2}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} HA + AB + BK \geq HK \\ AH + HK + KB \geq AB \end{cases} \Rightarrow HA + KB \geq |HK - AB| \Rightarrow (HA + KB)^2 \geq |HK - a|^2.$$



Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$A, H, K, B$  thẳng hàng (theo thứ tự đó nếu  $a > HK$ , theo thứ tự  $H, K, A, B$  khi  $a < HK$ ,  $A \equiv H, B \equiv K$  khi  $a = HK$ ) và:

$$\frac{HA}{KB} = \frac{CH}{DK} = \frac{IH}{IK} = \frac{IA}{IB} \Rightarrow \frac{IA}{a} = \frac{CH}{CH + DK} \Rightarrow IA = \frac{a \cdot CH}{CH + DK}$$

Tóm lại:  $CA + AB + BD$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $A, H$  nằm về 1 phía so với  $I$  và

$$IA = \frac{a \cdot CH}{CH + DK}.$$

### **Bài 5:**

$$\lambda_1 \cos(k_1 x) + \lambda_2 \cos(k_2 x) + \dots + \lambda_n \cos(k_n x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Quy nạp theo  $n$

Với  $n = 1$ , khẳng định của bài toán hiển nhiên đúng.

Giả sử khẳng định đã đúng đến  $n - 1$ .

Với  $n$ . Đặt  $f(x)$  là vế trái của (1).

Ta có:

$$-f''(x) = k_1^2 \lambda_1 \cos(k_1 x) + k_2^2 \lambda_2 \cos(k_2 x) + \dots + k_n^2 \lambda_n \cos(k_n x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f(x) + k_n^2 f''(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (k_i^2 - k_n^2) \lambda_i \cos(k_i x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Theo giả thiết quy nạp ta có  $(k_i^2 - k_n^2) \lambda_i = 0, \forall i = \overline{1, n-1}$ .

Do  $k_i, i = \overline{1, n-1}$  là các số thực dương khác nhau  $\Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i = \overline{1, n-1}$ .

$$\Rightarrow \lambda_n = 0.$$

Theo nguyên lý quy nạp ta có *dpcm*.

CHÚC CÁC BẠN ÔN TẬP TỐT.